Ünite

13

Eşitsizlikler

Eşitsizlikler

Dikkat Edilmeli

Eşitsizlik sorularında bilinmeyenlerin (x, y, a, b,...) tam sayı ya da doğal sayı olduğu verilmişse bilinmeyenlere değer verilerek (sayı seçilerek) çözüm yapılır.

Hangi ÖRNEK

x bir tam sayı olmak üzere,

$-9 < x < 14$

olduğuna göre, x in alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerin toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x bir doğal sayı olmak üzere,

$4 \le x < 10$

olduğuna göre, −3x + 5 ifadesinin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) −20 B) −21 C) −22 D) −23 E) −24

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

a bir tam sayı olmak üzere,

$-4 \le a < 5$

olduğuna göre, 2a + 3 ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x ve y tam sayı olmak üzere,

$-6 < x < 3$

$-4 < y < 5$

olduğuna göre, $3x - 2y$ ifadesinin alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) −11 B) −10 C) −9 D) −8 E) −2

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

a ve b tam sayı olmak üzere,

$4 \le a \le 12$

$3 \le b \le 8$

olduğuna göre, $\frac{a+4}{b+5}$ oranının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x ve y tam sayı olmak üzere,

$-5 < x < 2$

$11 < y \le 20$

olduğuna göre, $y - 3x$ ifadesinin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x ve y birer tam sayı olmak üzere,

$-5 < x < 7$

$-5 < y \le 11$

olduğuna göre, $y - 2x$ ifadesinin en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 7 B) 16 C) 19 D) 20 E) 21

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

b bir tam sayı olmak üzere,

$-3 \le b < 4$

olduğuna göre, 2b + 4 ifadesinin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

A) 14 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

a ve b tam sayı olmak üzere,

$-4 < a \le 2$

$1 < b < 5$

olduğuna göre, $a^2 + b^2$ toplamının en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 29 B) 32 C) 35 D) 37 E) 39

Hangi ÇÖZÜM

Dikkat Edilmeli

Eşitsizlik sorularında bilinmeyenlerin reel (gerçel, gerçek) sayı olduğu verilmişse ya da her hangi bir bilgi verilmemişse sayı seçilmeden (değer verilmeden) eşitsizlik kuralları uygulanarak çözüm yapılır.

Eşitsizlik Kuralları

1. Eşitsizliklerde toplama ya da çıkarma işlemi denklemlerde olduğu gibi yapılır.

ÖRNEK $-2 < x < 5 \Rightarrow -2 + 3 < x + 3 < 5 + 3$

$\Rightarrow 1 < x + 3 < 8$

ya da

$-2 < x < 5 \Rightarrow -2 - 10 < x - 10 < 5 - 10$

$\Rightarrow -12 < x - 10 < -5$ gibidir.

2. Eşitsizliklerde çarpma ya da bölme yapılırken

a. Pozitif sayılarla çarpma ya da bölme işlemi denklemlerde olduğu gibidir.

ÖRNEK $-2 < x < 5 \Rightarrow -2 \cdot 2 < 2x < 5 \cdot 2$

$\Rightarrow -4 < 2x < 10$

ya da

$-2 < x < 5 \Rightarrow \frac{-2}{3} < \frac{x}{3} < \frac{5}{3}$ gibidir.

b. Negatif sayılarla çarpma ya da bölme işlemi yapılırken eşitsizlikler yön değiştirir.

ÖRNEK $-2 < x < 5 \Rightarrow -2 \cdot (-3) > -3x > 5 \cdot (-3)$

$\Rightarrow 6 > -3x > -15$

ya da

$-2 < x < 5 \Rightarrow \frac{-2}{-1} > \frac{x}{-1} > \frac{5}{-1}$

$\Rightarrow 2 > -x > -5$ gibidir.

3. Eşitsizliklerde kesirler ters çevrilirken

Kesirler aynı işaretli ise eşitsizlikler yön değiştirilerek ters çevrilir.

ÖRNEK $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{1} < \frac{4}{1}$

$\Rightarrow 2 < 4$

ya da

$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{2}{1} > \frac{-4}{1}$

$\Rightarrow -2 > -4$

4. Kuvvet alma işlemi (yalnızca çift kuvvetler için)

a. Eşitsizliğin sınırları aynı işaretli ise sınırların karesi alınır. Büyük olan sonuç büyük tarafa, küçük olan sonuç küçük tarafa yazılır.

ÖRNEK

$2 < x < 5 \Rightarrow 4 < x^2 < 25$

ya da

$-5 < x < -2 \Rightarrow 4 < x^2 < 25$

b. Eşitsizliğin sınırları zıt işaretli ise sınırların karesi alınır. Büyük sonuç büyük tarafa yazılırken küçük sonuç daima sıfıra eşittir.

ÖRNEK

$-5 < x < 2 \Rightarrow 0 \le x < 25$

Hangi ÖRNEK

$1 < 3x - 2 \le 10$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$x^2 < x$

olduğuna göre, 3x + 7 ifadesinin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 17 B) 24 C) 27 D) 34 E) 36

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$-5 \le x < 4$

$2 \le y \le 7$

olduğuna göre, 4x + 2y ifadesinin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 47 B) 46 C) 45 D) 44 E) 43

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$-5 < x < 3$

$-6 < y < -1$

olduğuna göre, $x^2 + y^2$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 58 B) 59 C) 60 D) 61 E) 62

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x ve y gerçel sayı olmak üzere,

$-3 < x \le 5$

$-5 \le y < 4$

olduğuna göre, 2x − 3y ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$-3 < x \le 1$

$-2 \le y \le 2$

olduğuna göre, $x^2 + y^3$ ifadesinin değeri aşağıdaki aralıklardan hangisidir?

A) [−17, 17) B) [−13, 8) C) [−8, 17)

D) [−7, 7) E) [−7, 1)

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$19 < x^2 < 199$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı pozitif x tam sayısı vardır?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 18 E) 20

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$-6 < x \leq 4$

$2x - y + 1 = 0$

olduğuna göre, y nin alabileceği tam sayı değerlerin toplamı kaçtır?

A) −10 B) −8 C) −3 D) 9 E) 10

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$\frac{2}{3x-4} > \frac{1}{4}$

eşitsizliğini sağlayan en büyük x tam sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x-1} < \frac{1}{4}$

olduğuna göre, x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x < 0 olmak üzere,

$5xy - 30x < 0$

eşitsizliğini sağlayan y nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$$\frac{2x+1}{3} + \frac{3x-7}{4} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin en küçüğü kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{10} < 2$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (20, ∞) B) (−∞, 2) C) (−∞, 20)
D) (10, 20) E) (−20, ∞)

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

a < b < 0 olmak üzere,

$$c = \frac{2a+b}{a}$$

olduğuna göre, c için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) 1 < c < 2 B) 2 < c < 3 C) 3 < c < 4
D) 4 < c < 5 E) 5 < c < 6

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x < y < 0 olmak üzere,

$$c = \frac{5x - y}{x}$$

olduğuna göre, c için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $1 < c < 2$ B) $2 < c < 3$ C) $3 < c < 4$

D) $4 < c < 5$ E) $5 < c < 6$

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x, y ve z pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{x + y}{z} < \frac{x}{z} + 1$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $z < y$ B) $y < z$ C) $x < y$

D) $y < x$ E) $x < z$

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

a < c olmak üzere,

$$a \cdot b > b \cdot c$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $a > 0$ B) $b > 0$ C) $c > 0$

D) $b < 0$ E) $c < 0$

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{a \cdot b - a}{b} = 5$$

$$b < 6$$

olduğuna göre, a nın çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, 5) B) (3, 6) C) (5, 6) D) (6, 8) E) (1, 10)

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$x^2 < x$

$x \cdot y < 0$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $x > 0$ B) $x < 0$ C) $0 < y < 1$

D) $y > 0$ E) $y < 0$

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x, y ve z sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere,

$x^2 \cdot y > 0$

$y > x$

$y < z$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $x > 0$ B) $z > 0$ C) $x < 0$

D) $y < 0$ E) $z < 0$

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$x > 0$

$x \cdot z < 0$

$x \cdot (y - z) < 0$

olduğuna göre x, y ve z nin doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x > y > z$ B) $x > z > y$ C) $z > y > x$

D) $z > x > y$ E) $y > x > z$

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

x ve y gerçel sayılar olmak üzere,

$-2 \le x \le 7$

$-5 \le y \le 3$

olduğuna göre, x · y çarpımının alabileceği en büyük değer ile en küçük değerin toplamı kaçtır?

A) −10 B) −12 C) −14 D) −15 E) −20

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

5 katının 20 eksiği negatif olan kaç tane doğal sayı vardır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$24 \le x \le 60$

$3 \le y \le 12$

olduğuna göre, $\frac{x}{y}$ kesrinin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 15 E) 19

Hangi ÇÖZÜM

Dikkat Edilmeli

İki ya da daha fazla ifadenin çarpım veya bölüm durumunda olduğu eşitsizliklerin çözümü yapılırken işaret tablosu yapılır. Tablo üzerinde eşitsizliği sağlayan bölge araştırılır.

İşaret tablosu incelenirken;

1. Eşitsizliğin bir tarafı 0 yapılır. (Eğer yoksa)

ÖRNEK $x > \frac{1}{x} \Rightarrow x - \frac{1}{x} > 0$

2. Verilen ifade çarpanlarına ayrılır.

ÖRNEK $x > \frac{1}{x} \Rightarrow x - \frac{1}{x} > 0$ (Paydalar eşitlenir.)

$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} > 0$ (İki kare farkı)

$\Rightarrow \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x} > 0$

3. Bütün çarpanların ayrı ayrı kökleri bulunur.

$x > \frac{1}{x} \Rightarrow x - \frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} > 0$

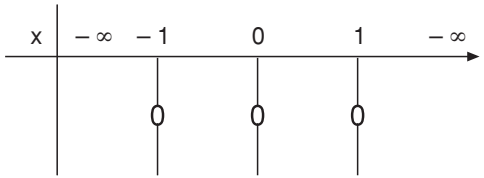
$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$

Kökler 1, 0, −1 dir.

4. İşaret tablosu hazırlanırken köklerin hepsi tablo üzerinde gösterilir.

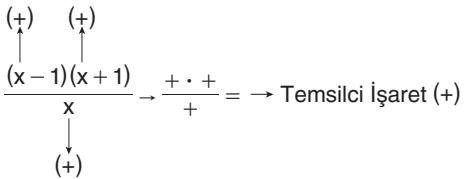
$\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x} > 0$

Kökler − 1 , 0 , 1

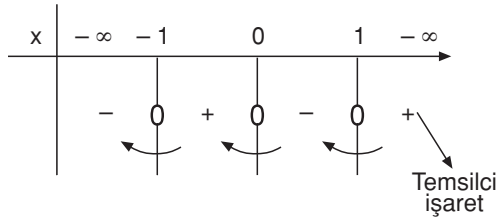


Tablodaki yatay doğru, sayı doğrusudur. Sayıların altındaki dikey doğruların üzerinde bulunan "O" lar sayının kök olduğunu belirtir.

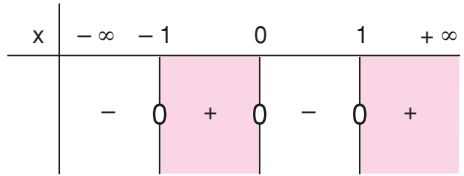
5. Çarpanlarda bulunan en büyük dereceli x lerin <u>önündeki</u> işaretler çarpılarak TEMSİLCİ İŞARET bulunur.



6. Temsilci işaret daha önce hazırlanan işaret tablosunda DAİMA en sağa yazılır. Sonra sola doğru sırayla dikey çizgileri (kökleri) geçerken işaretleri değiştirerek en sola ulaşılır.



Verilen eşitsizlikte (> O) yazılmışsa içinde (+) olan aralıklar, (< O) yazılmışsa içinde (−) olan aralıklar çözüm kümesidir.



Çözüm kümesi (−1, O) ∪ (1 < ∞)

8. Tablo üzerinde eşitsizlik çözümü yapılırken dikkat edilecek noktalar,

a. Bir eşitsizlikte aynı kökten çift sayıda (2, 4, 6.....tane) varsa ya da $(x - a)^{\text{çift sayı}}$ gibi ifadelerin köklerine çift katlı kök denir. ÇİFT KATLI KÖKLERDE İŞARET <u>DEĞİŞMEZ</u>.

b. Verilen eşitsizlikte "> O" ya da "< O" ifadeleri varsa çözüm aralığı yazılırken düz parantez "( )" , "≥ O" ya da "≤ O" ifadeleri varsa çözüm aralığı yazılırken köşeli parantez "[ ]" yapılır.

c. $(-\infty)$ veya $(+\infty)$ DAİMA köşesiz parantez ile ifade edilir.

d. Eşitsizliklerde sadeleştirme YAPILMAZ.

e. Üslü ifade ya da mutlak değerli ifade varsa eşitsizlik tablosuna dahil edilmez.

f. Paydayı sıfır yapan değerler HİÇBİR ZAMAN çözüm kümesine dahil edilmez, düz parantez ile yazılır.

Hangi ÖRNEK

$(x - 1) \cdot (x + 4) < 0$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı tam sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$\frac{x-5}{x+2} \leq 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-5, 2)$ B) $[-5, 2)$ C) $(-2, 5]$

D) $[-2, 5]$ E) $(-2, 5)$

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$x^2 < x$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, 1)$ B) $[0, 1)$ C) $[0, 1)$

D) $[0, 1]$ E) $(-1, 1)$

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

Karesi, 5 katından küçük olan doğal sayıların toplamı kaçtır?

A) 15 B) 10 C) 8 D) 7 E) 6

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$$\frac{(x-2)^2 \cdot (x+1)}{x-1} < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 2)$ B) $(-1, 1)$ C) $(1, 2)$
D) $(2, \infty)$ E) $(\infty, 2)$

Hangi ÇÖZÜM

Hangi ÖRNEK

$$\frac{(2x-3) \cdot (-x+6)}{x-5} \geq 0$$

eşitsizliği veriliyor.

Buna göre,

I. $x \leq \frac{3}{2}$

II. $\frac{3}{2} \leq x \leq 5$

III. $5 < x \leq 6$

IV. $x \geq 6$

ifadelerinden hangilerinin birleşimi, verilen eşitsizliğin en geniş çözüm kümesini oluşturmaktadır?

A) Yalnızl B) Yalnız III C) I ve III
D) I ve IV E) II ve IV

Hangi ÇÖZÜM