

Ünite

26

Fonksiyonlar

**Hangi
KPSS?**

FONKSİYON

Fonksiyon Tanımı

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A kümesindeki **her** elemanı B kümesinde **bir ve yalnız** bir elemana bağlayan ilişkiye **A dan B ye bir fonksiyon** denir.

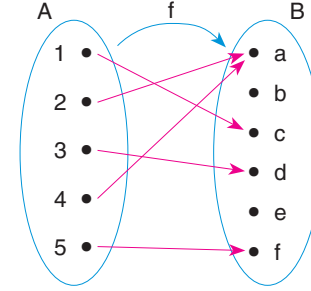
A dan A ya tanımlı bir fonksiyona da **A da tanımlı bir fonksiyon** denir. Fonksiyonlar genellikle f, g, h gibi küçük harflerle ifade edilir.

A dan B ye bir fonksiyonun gösterimi $f : A \rightarrow B$ şeklindedir. Burada A ya fonksiyonun **tanım kümesi**, B ye fonksiyonun **değer kümesi** adı verilir.

$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ kümesine A kümesinin **f altındaki görüntü kümesi** denir.

Bir fonksiyonun görüntü kümesi daima değer kümesinin alt kümesidir. Yani $f(A) \subseteq B$ dir.

Hangi ÖRNEK



Yukarıda verilen f fonksiyonuna göre soruları yanıtlayınız.

- Fonksiyonun tanım kümesi nedir?
- Fonksiyonun değer kümesi nedir?
- Fonksiyonun görüntü kümesi nedir?
- 2 nin görüntüsü nedir?
- $f(5)$ nedir?
- Görüntüsü a olan değerlerin kümesi nedir?
- $s(f(A))$ kaçtır?

Hangi ÇÖZÜM





Hangi ÖRNEK

$f: A \rightarrow B, f(x) = 5x - 2$ fonksiyonu veriliyor.



Buna göre,

a. $f(5)$ kaçtır?

b. Görüntüsü -7 olan eleman kaçtır?

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 3$



$g(x) = x^2 + x - 5$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre $f(4) + g(-1)$ toplamı kaçtır?

A) 3

B) 5

C) 7

D) 8

E) 11

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$f(3x + 1) = x^2 - 3x$



olduğuna göre, $f(7)$ değeri kaçtır?

A) -4

B) -2

C) 6

D) 16

E) 28

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$f: A \rightarrow B, f(x) = x^3 + 5$ ve $f(A) = \{4, 5, 13\}$ olduğuna



göre, A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2, -1, 0\}$

B) $\{-1, 0, 1\}$

C) $\{-2, -1, 1\}$

D) $\{-1, 0, 2\}$

E) $\{-1, 0, 1, 2\}$

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$f : [-5, 3) \mathbb{R}, f(x) = 9 - 4x$



fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-3, 29)$ B) $(-3, 29]$ C) $(-3, 25]$
D) $[-3, 25)$ E) $[-7, 21)$

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

f ve g fonksiyonları için



$f(x) = g(x) \cdot (x + 1) - x + 5$
eşitliği veriliyor.

$g(3) = -2$ olduğuna göre, $f(3)$ değeri kaçtır?

- A) -6 B) -3 C) -1 D) 2 E) 5

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$f(x) = x^2 + x - 4$ fonksiyonu veriliyor.



Buna göre $f(2 - x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^2 - 3x + 2$ B) $x^2 - 3x + 5$ C) $x^2 - 5x + 2$
D) $x^2 + 3x - 5$ E) $x^2 + 5x - 2$

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$f(2^x + 3) = \sqrt{x} - x + m - 1$



fonksiyonu için $f(19) = 5$ tir.

Buna göre m değeri kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Hangi ÇÖZÜM





Hangi ÖRNEK

$$f(x + 3) + x \cdot f(3x - 5) = x^2 + 14$$



olduğuna göre, $f(7)$ değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Hangi ÇÖZÜM



Birim Fonksiyon

A ve B boş olmayan iki küme olsun, $f: A \rightarrow B$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona *birim fonksiyon* denir.

Başka bir deyişle birim fonksiyon bir elemanı kendine dönüştüren fonksiyondur.

$$f(x) = x$$

$$g(x + 3) = x + 3$$

Hangi ÖRNEK

$y = f(x)$ birim fonksiyondur.



Buna göre $f(-3) + f(1)$ toplamı kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$$f(x) = (m - 2)x$$



fonksiyonu birim fonksiyondur.

Buna göre m değeri kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) -1

Hangi ÇÖZÜM



**Hangi
ÖRNEK**

$$f(x + 3) = (a + 1)x^2 + (b - 8)x - c + 2$$

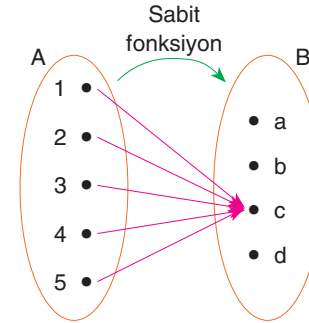
f(x) fonksiyonu birim fonksiyondur.

Buna göre $f(a + b + c)$ değeri kaçtır?

- A) 11 B) 10 C) 8 D) 7 E) 5

**Hangi
ÇÖZÜM****Sabit Fonksiyon**

- A ve B boş olmayan iki küme olsun. $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunda her $x \in A$ için $f(x) = c$ oluyorsa bu fonksiyona sabit fonksiyon denir.
- Başka bir deyişle sabit fonksiyon, tanım kümesindeki tüm elemanları değer kümesindeki tek bir elemana dönüştüren fonksiyondur.
- Sabit fonksiyonda görüntü kümesi daima 1 elemanlıdır.





Hangi ÖRNEK

f sabit fonksiyondur.



$$f(a) + f(b) = 24$$

olduğuna göre, f(2022) değeri kaçtır?

- A) 12 B) 24 C) 48 D) 2022 E) 4044

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$$f(x) = (m - 3)x^3 + (n + 2)x - 2m + n$$



sabit fonksiyonu veriliyor.

Buna göre f(2022) değeri kaçtır?

- A) -8 B) -6 C) -2 D) 4 E) 12

Hangi ÇÖZÜM



Dikkat Edilmeli

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ ve } g(x) = \frac{kx^2 + mx + n}{px^2 + rx + s} \text{ fonksiyonları sabit}$$

fonksiyonlar iken, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ve $\frac{k}{p} = \frac{m}{r} = \frac{n}{s}$ olmalıdır.

Hangi ÖRNEK



$$f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x + a - 2}{1 - 2x}$$

sabit fonksiyondur. Buna göre,

- a. a değeri kaçtır?
b. f(2) değeri kaçtır?

Hangi ÇÖZÜM



Doğrusal Fonksiyon

$a \neq 0, a, b \in \mathbb{R} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f(x) = ax + b$ kuralı ile verilen fonksiyona *doğrusal fonksiyon* denir.

Hangi ÖRNEK

f bir doğrusal fonksiyondur.



$f(2) = -1$ ve $f(-3) = 14$

olduğuna göre, $f(4)$ değeri kaçtır?

- A) -7 B) -3 C) 1 D) 2 E) 5

Hangi ÇÖZÜM



Parçalı Fonksiyon

Tanım kümelerinin ayrık alt kümelerinde farklı kurallarla belirlenen fonksiyonlara *parçalı tanımlı fonksiyon* ya da *parçalı fonksiyon* denir.

Hangi ÖRNEK



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 2 \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $f(1) + f(5)$ toplamı kaçtır?

- A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

Hangi ÇÖZÜM





Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ fonksiyonları verildiğinde A daki her elemanı f ve g fonksiyonları yardımı ile C deki yalnız bir elemana eşleyen fonksiyona f ile g fonksiyonlarının bileşkesi denir.

- $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ bileşke fonksiyonu bulunurken g fonksiyonunda x değişkenin yerine f fonksiyonu yazılır.
- f, g ve h fonksiyonları için, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ olduğundan fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.
- f ve g fonksiyonları için, $(f \circ g) \neq (g \circ f)$ olduğundan fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur.

Hangi ÖRNEK



$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = x^2 + 4$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre

- $(f \circ g)(x)$
- $(g \circ f)(x)$
- $(f \circ f)(x)$

fonksiyonlarının kurallarını bulunuz.

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK



$$f(x) = x^2 - x + 3$$

$$g(x) = x^3 + x - 1$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre

- $(f \circ g)(1)$
- $(g \circ f)(0)$

değerlerini bulunuz.

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$$f(x - 3) = 5x + 3$$



$$g(2x + 1) = x^2 - 1$$

olduğuna göre, $(f \circ g)(7)$ değeri kaçtır?

- A) 25 B) 34 C) 57 D) 58 E) 63

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$$(f \circ g)(x) = 4x + 1 \text{ ve } f(x) = 2x + 3$$



olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x - 3$ B) $2x - 1$ C) $2x + 1$
D) $8x - 1$ E) $8x + 3$

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

f doğrusal fonksiyondur.



$$(f \circ f)(x) = 4x - 3$$

olduğuna göre, $f(7)$ değeri kaç olabilir?

- A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

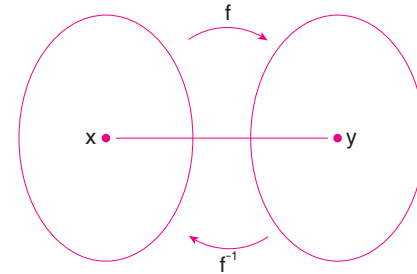
Hangi ÇÖZÜM



Bir Fonksiyonun Tersi

$f: A \rightarrow B, y = f(x)$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun.

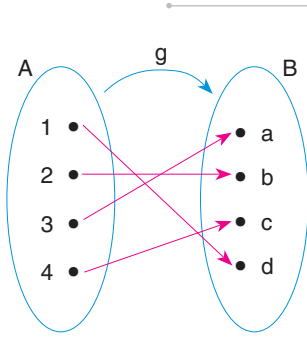
Bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}: B \rightarrow A, x = f^{-1}(y)$ olur.



$$y = f(x) \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$



Hangi ÖRNEK



$f : A \rightarrow B$ fonksiyonunun Venn şeması gösterim yukarıda verilmiştir.

Buna göre

- $f^{-1}(a)$ değerini
- $f^{-1}(d) + f^{-1}(b)$ toplamını
- f^{-1} fonksiyonunun görüntü kümesini **bulunuz**.

Hangi ÇÖZÜM



Dikkat Edilmeli

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

$$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f^{-1}(g(x)) = x$$

$y = f(x)$ biçiminde verilen bir f fonksiyonunun tersini bulmak için tanım ve görüntü kümeleri yer değiştireceğinden x ile y yer değiştirdikten sonra y yalnız bırakılarak f^{-1} fonksiyonu bulunur.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ için } f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} \text{ olur.}$$

$$f: \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}, f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ için } f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} \text{ olur.}$$

Hangi ÖRNEK



$$f(x) = 3x + 5$$

fonksiyonunun tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x - 5$

B) $5x + 3$

C) $\frac{x-5}{3}$

D) $\frac{x-3}{5}$

E) $\frac{x+5}{3}$

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

Aşağıda verilen fonksiyonların terslerini bulunuz.



- a. $f(x) = \frac{2x-2}{4x-7}$
 b. $g(x) = \frac{2x}{3x+1}$
 c. $h(x) = \frac{5-2x}{6x}$

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$$x = \frac{3-4f(x)}{2f(x)+1}$$



eşitliği ile verilen f fonksiyonunun tersi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{4x-3}{2x+1}$ B) $\frac{-4x+3}{2x+1}$ C) $\frac{3-4x}{2x-1}$
 D) $\frac{4x+3}{2x-1}$ E) $\frac{4x+3}{2x+1}$

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$$f(x^2 - x + 2) = 3x - 1$$



eşitliği ile verilen fonksiyon için $f^{-1}(5)$ değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$$f^{-1}(x) = x^3 - 2a - 1$$



eşitliği ile verilen f fonksiyonunun grafiği A(3, 2) noktasından geçmektedir.

Buna göre a değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Hangi ÇÖZÜM





Ters Fonksiyon Özellikleri

- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $I^{-1} = I$ (I : birim fonksiyon)
- $fof^{-1} = f^{-1}of = I$
- $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$
- $(fogh)^{-1} = h^{-1}og^{-1}of^{-1}$
- f ile f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik.

Hangi ÖRNEK

$$f(x) = x^3 - 2x$$



olduğuna göre, $(fof^{-1}of)$ (2) değeri kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Hangi ÇÖZÜM



Hangi ÖRNEK

$$(fog^{-1})(x) = 5 - 2x$$



olduğuna göre, $(gof^{-1})(-3)$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Hangi ÇÖZÜM



